

# Ondes électromagnétiques

<b>I. ONDE DANS LE VIDE .....</b>	<b>2</b>
1. ONDE PLANE DANS LE VIDE : CAS GENERAL .....	2
1. Variables dont dépendent les champs $E$ et $B$ dans le vide : .....	2
2. Les champs doivent satisfaire $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ et $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ : .....	2
3. Les champs doivent satisfaire $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$ : .....	2
4. L'énergie : .....	3
5. Conditions qui permettent de considérer les ondes EM comme planes : .....	3
2. CAS PARTICULIER : L'O.P.P.M. DANS LE VIDE : .....	4
1. OPPM : définition (rappel) : .....	4
2. Utilisation de la notation complexe pour l'OPPM : .....	4
3. Relation de dispersion de l'OPPM : .....	4
3. ONDE NON PLANE DANS LE VIDE : .....	4
1. Détermination de $E$ : cas simple .....	4
2. Détermination de $E$ : cas un peu moins simple .....	5
3. Détermination de $B$ dans le cas simple : .....	5
<b>II. ONDE PLANE DANS UN MILIEU NON VIDE.....</b>	<b>6</b>
1. DIELECTRIQUE PARFAIT .....	6
2. CONDUCTEUR IMPARFAIT .....	6
1. Ramener l'étude à celle d'un diélectrique parfait : .....	6
2. Allure de $E$ : .....	6
3. Expression de $E$ : .....	7
4. Epaisseur de peau : .....	7
5. Calcul de $B$ : .....	7
6. Le transport d'énergie : .....	8
3. PLASMA .....	8
1. Ramener l'étude à celle d'un conducteur : .....	8
2. Ramener l'étude à celle d'un diélectrique parfait .....	9
3. 1 <sup>er</sup> cas : $\epsilon_r > 0$ .....	9
4. 2 <sup>ème</sup> cas : $\epsilon_r \leq 0$ .....	10
5. Pas de pertes par effet Joules : .....	10
6. Exemple de Plasma : l'ionosphère .....	10
<b>III. DISCONTINUTE DU CHAMP .....</b>	<b>10</b>
1. $E_N$ .....	10
2. $B_N$ .....	11
3. $E_T$ .....	11
4. $B_T$ .....	11
5. RELATIONS DE PASSAGES .....	12
<b>IV. REFLEXION D'UNE OPPM SUR UN CONDUCTEUR .....</b>	<b>12</b>
1. PRESSION DE RADIATION .....	12
1. Calcul en considérant le gaz de photon .....	12
2. Expressions de la pression de radiation en fonction de $E_0$ et $B_0$ .....	13
3. La pression de radiation en fonction de la densité d'énergie interne .....	13
4. Retrouver l'expression de la pression de radiation sans les photons .....	13
2. CONDUCTEUR EN MOUVEMENT .....	13
1. L'effet Doppler .....	13
<b>V. ONDES GUIDES DANS UN CONDUCTEUR.....</b>	<b>13</b>
1. GUIDE D'ONDE .....	13
1. Hypothèses .....	13
2. Calcul de $E$ .....	13

# 1. Onde dans le vide

## 1. Onde plane dans le vide : cas général

### 1. Variables dont dépendent les champs E et B dans le vide :

On se place dans le vide :  $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = 0 \end{cases}$

On a vu page MP.P.9.3.1 que dans le vide, l'équation de propagation de  $\vec{E}$  était :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Intéressons nous à une propagation de l'onde plane selon l'axe (0,z) :  $\vec{E}(z,t)$

On a vu page MP.P.5.1.2 que les solutions de cette équation de propagation sont

nécessairement du type  $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_+\left(t - \frac{z}{c}\right) + \vec{E}_-\left(t + \frac{z}{c}\right)$ .

On ne s'intéresse qu'à une propagation dans un seul sens : le sens positif :

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_+\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

De même pour  $\vec{B}$ . (même équation de propagation)

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ E_y\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{z}{c}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ B_y\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ B_z\left(t - \frac{z}{c}\right) \end{pmatrix}$$

On a donc :

De plus, les champs doivent satisfaire les équations de Maxwell.

### 2. Les champs doivent satisfaire MG et MΦ ⇒ onde TEM :

$$\text{MG : } \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

$$\text{Or, en notant } u = t - \frac{z}{c}, \text{ on a : } \text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial u}$$

Donc :  $\frac{\partial E_z}{\partial u} = 0$ . Donc, en ne prenant pas en compte les éventuels champs statiques,

$$\text{on a : } E_z = \text{cte} = 0$$

On procède de même pour  $\vec{B}$  (avec MΦ :  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ ) : on a :  $B_z = 0$

Conclusion : les champs E et B sont transverses (c'est-à-dire perpendiculaires à la direction de propagation). L'onde est une onde TEM (transverse électrique magnétique)

### 3. Les champs doivent satisfaire MF ⇒ E ⊥ B :

$$\text{Avec } u = t - \frac{z}{c}, \text{ on a : } \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\vec{b}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial u} \\ -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial u} \\ \frac{\partial B_y}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{MF : } \vec{b}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \text{ Cela impose : } \begin{cases} \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial u} = -\frac{\partial B_x}{\partial u} \\ -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial u} = -\frac{\partial B_y}{\partial u} \end{cases}$$

En ne prenant pas en compte les éventuels champs statiques, on a :  $\begin{cases} E_y = -c \cdot B_x \\ E_x = c \cdot B_y \end{cases}$ .

Donc :  $E_x \cdot B_x + E_y \cdot B_y = 0$ , donc :  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , donc :  $\vec{E} \perp \vec{B}$ .

Donc :  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est un trièdre direct (avec  $\vec{u} = \vec{e}_z$  : direction de propagation).

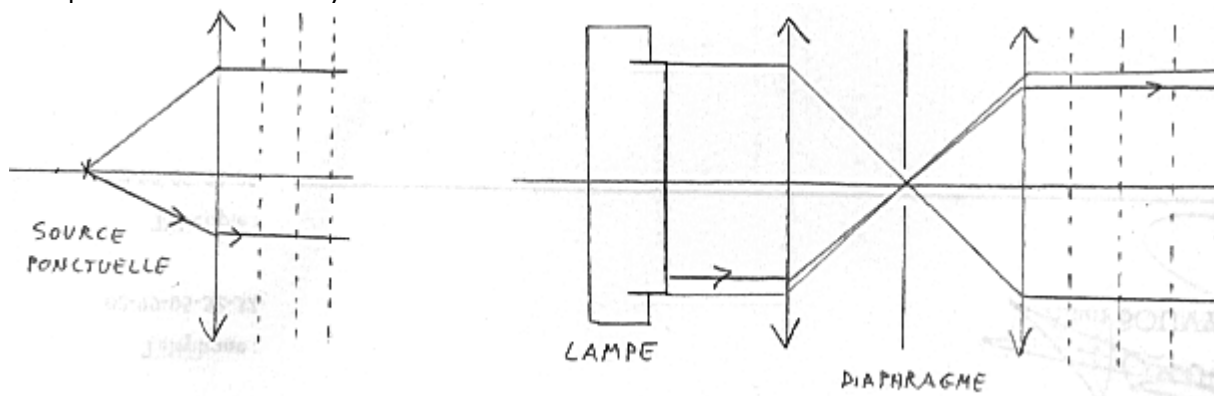
$$\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$$

#### 4. L'énergie :

L'énergie est le long de l'onde :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{B} \cdot \vec{u}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 \cdot c} \cdot \vec{u} = \frac{c \cdot B^2}{\mu_0} \cdot \vec{u}$

#### 5. Conditions qui permettent de considérer les ondes EM comme planes :

Conditions expérimentales et d'observation telles qu'on puisse considérer les ondes électromagnétiques comme plane : une onde est plane si le champ électromagnétique est uniforme dans tout plan (plan d'onde) orthogonal à la direction de propagation. Expérimentalement, on s'en approche en plaçant une source ponctuelle au foyer d'une lentille :



Cependant :

- le faisceau de sortie est limité (diaphragmé) par la lentille, d'où diffraction qui sera donc négligée.
- la source n'est évidemment pas rigoureusement ponctuelle (dans le 1<sup>er</sup> schéma, d'où le 2<sup>ème</sup>).
- le stigmatisme entre le foyer et le point image à l'infini n'est en général pas rigoureux.

## 2. Cas particulier : L'O.P.P.M. dans le vide :

### **1. OPPM : définition (rappel) :**

Rappel : on a défini page MP.P.5.1.2 l'OPPM (onde plane progressive monochromatique) ou OPPS (onde plane progressive sinusoïdale) : c'est une onde du type :  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \epsilon(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  avec  $\omega = \epsilon$  et  $\vec{k} = k \cdot \vec{u}$

En notation complexe on a :  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

L'onde plane est infiniment étendue dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation. Pour que l'onde plane existe, il ne faut pas qu'elle soit limitée (ne pas imposer de conditions aux limites)

### **2. Utilisation de la notation complexe pour l'OPPM :**

Il faut nécessairement :

- que l'onde soit une OPPM ( $\vec{E}_0 = \epsilon$ )
- que la convention complexe soit celle de l'électricité (comme au dessus) (et non celle de l'optique).

Dans ce cas, on a :  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j \cdot \omega \cdot \vec{E}$  et  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -j \cdot k_x \cdot \vec{E}$

Et donc :  $\vec{d}(\vec{E}) = -j \cdot \vec{k} \cdot \vec{E}$ ,  $\vec{b}(\vec{E}) = -j \cdot \vec{k} \wedge \vec{E}$  et  $\vec{\Delta}(\vec{E}) = -k^2 \cdot \vec{E}$

### **3. Relation de dispersion de l'OPPM :**

On a :  $\vec{\Delta}(\vec{E}) = -k^2 \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  et  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

Et comme  $\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ , on en déduit : la relation de dispersion de l'OPPM :

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  avec  $k = \pm \frac{\omega}{c}$ , selon le sens de propagation.

## 3. Onde non plane dans le vide :

### **1. Détermination de E : cas simple**

Intéressons-nous par exemple à une onde du type :  $\vec{E} = \underline{E}_0(z) \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)} \cdot \vec{e}_y$

$$\Delta \vec{E}_y - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\left( -k^2 \cdot \underline{E}_0(z) + \frac{\partial^2 \underline{E}_0(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \underline{E}_0(z) \right) \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_0(z)}{\partial z^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \cdot \underline{E}_0(z) = 0$$

□ 1<sup>er</sup> cas :  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$

Notons :  $K = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$ . On a donc :  $\frac{\partial^2 \underline{E}_0(z)}{\partial z^2} + K^2 \cdot \underline{E}_0(z) = 0$

Les solutions sont du type :  $\underline{E}_0(z) = A \cdot e^{jKz} + B \cdot e^{-jKz}$

Donc :  $\underline{E} = (A \cdot e^{jKz} + B \cdot e^{-jKz}) \cdot e^{j(\omega t - kz)}$

En imposant des conditions aux limites, on fixe les constantes et on peut par exemple, en fixant  $E=0$  si  $z=0$ , avoir une solution du type :  $\underline{E} = C \cdot \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{\omega}{c} \cdot z \right) \cdot e^{j(\omega t - kz)}$

□ 2ème cas :  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$

Notons :  $K = \sqrt{\left| \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right|}$ . On a donc :  $\frac{\partial^2 \underline{E}_0(z)}{\partial z^2} - K^2 \cdot \underline{E}_0(z) = 0$

Les solutions sont du type :  $\underline{E}_0(z) = A \cdot e^{Kz} + B \cdot e^{-Kz}$

Donc :  $\underline{E} = (A \cdot e^{Kz} + B \cdot e^{-Kz}) \cdot e^{j(\omega t - kz)}$

## **2. Détermination de E : cas un peu moins simple**

Généralisation au cas où le champ E est du type :  $\vec{E} = \underline{E}_0(x, y, z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot \vec{e}_y$

E doit toujours satisfaire les équations de Maxwell, donc MG :  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

Donc :  $0 + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + 0 = 0$ , et :  $\frac{\partial \underline{E}}{\partial y} = \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} = 0$ , donc :  $\vec{E} = \underline{E}_0(x, z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot \vec{e}_y$

On a :  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ , donc :  $\Delta \underline{E}_0 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \underline{E}_0}{\partial t^2} = 0$

On suppose plus particulièrement que :  $\underline{E}_0(x, z) = f(x) \cdot g(z)$

$\Delta \underline{E}_0 = f''(x) \cdot g(z) + f(x) \cdot g''(z)$ , donc :  $f''(x) \cdot g(z) + f(x) \cdot g''(z) + \frac{f(x) \cdot g(z)}{c^2} \cdot \omega^2 = 0$

donc :  $\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(z)}{g(z)} = -\frac{\omega^2}{c^2}$

Ceci devant être vrai quels que soient x et z, on en déduit que :

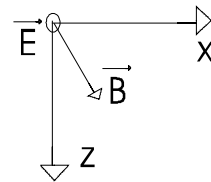
$\frac{f''(x)}{f(x)} = A$  et  $\frac{g''(z)}{g(z)} = B$  (avec  $A + B = -\frac{\omega^2}{c^2}$ ). On est donc ramené au cas précédent.

## **3. Détermination de B dans le cas simple :**

Calcul de B dans le cas où  $\vec{E} = \underline{E}_0(z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot \vec{e}_y$  :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \underline{E}}{\partial z} = -\frac{\partial \underline{E}_0(z)}{\partial z} \cdot e^{j(\omega t - kz)} \\ 0 \\ \frac{\partial \underline{E}}{\partial x} = -j \cdot k \cdot \underline{E}_0(z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \end{pmatrix} = -j \cdot \omega \cdot \vec{B} \text{ par MF}$$

Donc : 
$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{\partial \underline{E}_0(z)}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{k}{\omega} \cdot \underline{E}_0(z) \end{pmatrix} \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)}$$



## 19. Onde plane dans un milieu non vide

### 1. Diélectrique parfait

$\gamma = 0$  et  $\epsilon_r$  donné. On prend le diélectrique parfait non chargé :  $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = \vec{0} \end{cases}$ .

$\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  remplace partout  $\mu_0 \cdot \epsilon_0$ .

On se ramène ainsi à l'étude précédente. Compte tenu de ces hypothèses, les équations de Maxwell se simplifient.

Dans un diélectrique parfait, il y a une propagation possible d'OPPM.

On a la relation de dispersion suivante :  $\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 = \frac{1}{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$

### 2. Conducteur imparfait

#### 1. Ramener l'étude à celle d'un diélectrique parfait :

$\gamma \gg \omega \cdot \epsilon_0$  et  $\epsilon_r \approx 1$ .  $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = \gamma \cdot \vec{E} \end{cases}$  et  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

On a donc :  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j \cdot \omega \cdot \vec{E}$  que l'on réinjecte dans MA :  $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = (\mu_0 \cdot \gamma + j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0) \cdot \vec{E}$

Donc :  $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \left(1 + \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0}\right) \cdot \vec{E}$

On note :  $\epsilon_r^* = 1 + \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0}$  (complexe, donc

fictif, d'où l'étoile)

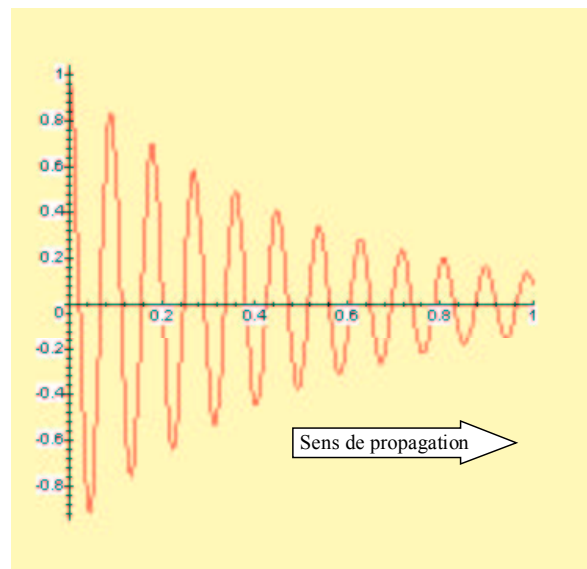
On est donc ramené à un diélectrique parfait de permittivité relative  $\epsilon_r^*$  <sup>ii</sup>.

#### 2. Allure de E :

On a :  $\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 = \frac{1}{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r^*}$ . Donc on ne peut

pas avoir à la fois  $\omega$  et  $k$  réels.

Donc : on prend  $\omega$  réel et  $k = \alpha + j \cdot \beta$



<sup>i</sup> En fait, il suffit de prendre  $\gamma$  grand (devant quelque chose que l'on précise plus tard et qui est bien ceci :  $\gamma \gg \omega \cdot \epsilon_0$ ). On se place en fait ainsi dans l'A.R.Q.S. (cf. MP.P.18).

<sup>ii</sup> L'intérêt est qu'on a alors les mêmes équations de propagation que dans le vide ( $\gamma=0$  et  $j=0$ )

complexe.

On a donc alors :  $e^{j(\omega t - k \cdot x)} = e^{j(\omega t - (\alpha + j\beta) \cdot x)} = e^{\beta \cdot x} \cdot e^{j(\omega t - \alpha \cdot x)}$

Si  $\alpha > 0$ , alors  $\beta < 0$  pour que l'onde s'atténue (comme sur le graphique).

De même, si  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ . (Le sens de propagation est alors opposé au précédent).

### 3. Expression de E :

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r^*} = \frac{k^2}{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \left(1 + \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0}\right)}$$

$$\text{Donc : } k^2 = \omega^2 \cdot \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \left(1 + \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0}\right) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \cdot \left(1 + \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0}\right)$$

Donc :  $\frac{\omega^2}{k^2} \neq c_0^2$  (dépend de  $\omega$ ).

On fait l'approximation suivante :  $\gamma \gg \omega \cdot \epsilon_0$ . Remarquer que cette approximation dépend de la fréquence, et n'est donc pas nécessairement toujours justifiée. Pour par exemple un conducteur correct :  $\gamma \approx 0^0 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $\omega \ll 0^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . L'approximation est justifiée.

$$\text{Donc : } 1 + \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0} \approx \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0}$$

$$\text{On a : } k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \cdot \frac{\gamma}{\omega \cdot \epsilon_0} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}, \text{ donc : } k = \pm \frac{1}{c_0} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma}{\epsilon_0}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = \pm \frac{1-j}{\sqrt{2} \cdot c_0} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma}{\epsilon_0}}$$

On obtient donc :  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-\frac{1}{c_0} \cdot \sqrt{\frac{\gamma \cdot \omega}{2 \cdot \epsilon_0}} \cdot x} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{1}{c_0} \cdot \sqrt{\frac{\gamma \cdot \omega}{2 \cdot \epsilon_0}} \cdot x\right)}$  (ainsi :  $\alpha > 0$  et  $\beta < 0$ )

Remarque : on peut obtenir ce résultat d'une manière un peu différente : en écrivant :  $\vec{E} = f(z) \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_x$ .  $E_0$  est alors contenu dans  $f(z)$ . On applique alors l'équation de propagation. On obtient un équation différentielle en  $f(z)$  qui donne finalement la même expression de E.

### 4. Epaisseur de peau :

$$\text{Vitesse de phase : } v_\varphi = \frac{\omega}{\alpha} = c_0 \cdot \omega \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \epsilon_0}{\gamma \cdot \omega}} = c_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \omega}{\gamma}} \ll c_0$$

La longueur caractéristique de l'atténuation ou épaisseur de peau est  $\delta = c_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \epsilon_0}{\gamma \cdot \omega}}$

(elle est positive telle que :  $e^{\beta \cdot x} = e^{-\frac{x}{\delta}}$ ).

C'est la longueur de pénétration d'une onde dans un métal.

$$\text{Ordre de grandeur : } \delta \approx 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-1}}{10^0 \cdot 2\pi \cdot v}} \approx 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}}$$

### 5. Calcul de B :

L'onde est TEM (transverse électrique magnétique), donc par exemple de la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} = \underline{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)} \cdot \vec{e}_y \\ \vec{B} = \underline{B}_0 \cdot e^{j(\omega t - k \cdot x)} \cdot \vec{e}_z \end{cases} \text{ avec } \vec{E} = \underline{E}_0 \cdot e^{-\frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{\gamma \omega}{2 \cdot \epsilon_0}} \cdot x} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{\gamma \omega}{2 \cdot \epsilon_0}} \cdot x\right)}$$

□ 1<sup>ère</sup> méthode : on sait qu'en introduisant des grandeurs complexes, on se ramène à un diélectrique parfait :  $k = \frac{1-j}{\delta}$  et  $c = \frac{\omega \cdot \delta}{1-j}$

Et alors, la relation valable pour une onde plane dans un diélectrique parfait peut être utilisée :  $\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} = \frac{1-j}{\delta \cdot \omega} \cdot \vec{e}_x \wedge \vec{E} = \frac{1-j}{\delta \cdot \omega} \cdot \underline{E} \cdot \vec{e}_z$ .

Remarque : on observe un déphasage entre B et E.

□ 2<sup>ème</sup> méthode<sup>iii</sup> : on utilise MF

$$\vec{b}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix} = -(1+j) \cdot \frac{1}{c_0} \cdot \sqrt{\frac{\gamma \cdot \omega}{2 \cdot \epsilon_0}} \cdot \underline{E} \cdot \vec{e}_z = -\frac{(1+j)}{\delta} \cdot \underline{E} \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j \cdot \omega \cdot \underline{B} \cdot \vec{e}_z$$

Donc :  $\underline{B} = \frac{1-j}{\omega \cdot \delta} \cdot \underline{E}$ .

## **6. Le transport d'énergie :**

Il faut calculer  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ . Ceci n'est valable que dans  $\mathbb{R}$ . Dans  $\mathbb{C}$ , on n'a seulement

les relations suivantes :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \Re \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \Re \left( \frac{\vec{E}^* \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)$

On a par exemple :  $\vec{E} = E_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \cdot \vec{e}_y$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \Re \left( E_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \cdot \frac{1+j}{\omega \cdot \delta} \cdot E_0 \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{-j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{e}_x \right) = \frac{E_0^2}{2 \cdot \delta \cdot \mu_0 \cdot \omega} \cdot e^{-\frac{2z}{\delta}} \cdot \vec{e}_x$$

## **3. Plasma**

### **1. Ramener l'étude à celle d'un conducteur :**

Un plasma est un gaz ionisé.

On étudie la propagation d'une OPPM dans le plasma :  $\vec{E} = \underline{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - k \cdot \vec{r})}$   
 $\epsilon_r \approx 1$ .

On suppose que le gaz est constitué :

- d'ions positifs de charge  $e$  :  $n$  par unité de volume
- d'électrons de charge  $-e$  :  $n$  par unité de volume

On suppose que les ions positifs sont fixes : que seuls sont mobiles sous l'action du champs les électrons.

<sup>iii</sup> Cette méthode est identique au principe de la démonstration de la formule utilisée dans la 1<sup>ère</sup> méthode et est très générale.



La RFD pour un électron donne :  $-e \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = m \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  où  $m$  est la masse de l'électron.

$B$  est sans doute de l'ordre de  $E/c$ , comme dans le vide. Donc, pour  $v \ll c$ , on a  $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|$ . Donc : on néglige l'action de  $B$ .

On a alors :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \cdot \vec{E}$ , donc :  $\vec{v} = -\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \vec{E}$

Or  $\vec{j} = \rho_{e^-} \cdot \vec{v} = -n \cdot e \cdot \vec{v}$  (car seuls les électrons négatifs sont mobiles)

Donc :  $\vec{j} = \frac{n \cdot e^2}{m \cdot j \cdot \omega} \cdot \vec{E}$ . Donc :  $\gamma^* = -j \cdot \frac{n \cdot e^2}{m \cdot \omega}$ .

Donc on est ramené à l'étude d'un conducteur dont la conductivité est un complexe.

## 2. Ramener l'étude à celle d'un diélectrique parfait

Comme nous l'avons déjà vu, l'équation MA nous donne :

$$\vec{b}(\vec{B}) = j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \left(1 + \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0}\right) \cdot \vec{E}$$

Donc, en considérant de nouveau un  $\epsilon_r^* = 1 + \frac{\gamma^*}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0}$ , on se ramène au cas d'un diélectrique parfait dans le vide.

$\epsilon_r^* = 1 + \frac{\gamma^*}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0} = 1 - \frac{n \cdot e^2}{\omega^2 \cdot \epsilon_0}$ . Donc  $\epsilon_r^*$  est réel. Cependant, on laisse l'étoile car il s'agit bel et bien d'un  $\epsilon_r$  virtuel : en effet, alors que  $\epsilon_r \geq 1$  normalement, ici :  $\epsilon_r^* < 1$  (et il peut même être négatif).

Notons la pulsation de plasma :  $\omega_p = \sqrt{\frac{n \cdot e^2}{m \cdot \epsilon_0}}$ . On a donc :  $\epsilon_r^* = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$

## 3. □ 1<sup>er</sup> cas : $\epsilon_r > 0$

On a alors :  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \epsilon_r^*} > c_0^2$

Dans le plasma, l'onde se propage donc plus vite que dans le vide.

On a :  $\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 = \frac{c_0^2}{\epsilon_r^*} = \frac{c_0^2}{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \neq c_0^2$  (dépend de  $\omega$ )

Donc le milieu est dispersif (la vitesse dépend de  $\omega$ ). On a la relation de dispersion

suivante :  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c_0^2}$

Dérivons cette relation :  $2 \cdot k = \frac{2 \cdot \omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial k}}{c_0^2}$ . Donc :  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c_0^2 \cdot k}{\omega} < c_0$

On a aussi :  $v_\phi = c = \frac{\omega}{k}$ . Donc :  $v_\phi \cdot v_g = c_0^2$

#### 4. □ 2<sup>ème</sup> cas : $\epsilon_r \leq 0$

On a donc :  $\omega < \omega_p$

$\omega$  est réel.  $k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right) < 0$  (c'est donc un complexe)

On retrouve donc l'expression de E comme on l'a déjà fait plus haut.

En notant :  $k = -j \cdot \alpha$ , on a :  $\vec{E} = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_x$ , et par MF :  $\vec{B} = \frac{\alpha \cdot E_0}{j \cdot \omega} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_y$ .

Donc :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \Re \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$ , donc :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = 0$

#### 5. Pas de pertes par effet Joules :

$\gamma^* = -j \cdot \frac{n \cdot e^2}{m \cdot \omega}$ , donc :  $\vec{j} = \frac{n \cdot e^2}{m \cdot j \cdot \omega} \cdot \vec{E}$

$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \Re \left( \vec{j} \cdot \vec{E}^* \right) = \frac{1}{2} \cdot \Re \left( -j \cdot \frac{n \cdot e^2}{m \cdot \omega} \cdot |\vec{E}|^2 \right)$ , donc :  $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$

#### 6. Exemple de Plasma : l'ionosphère

L'ionosphère est ionisée par le soleil. Les ondes radio qu'on envoie par exemple vers les satellites doivent avoir une fréquence (plus précisément une pulsation) plus grande que  $\omega_p$  pour pouvoir traverser l'ionosphère et être ainsi récupérées. Si  $\omega < \omega_p$ , l'onde est réfléchiée par l'ionosphère. Ceci a aussi des applications.

## III. Discontinuité du champ

On étudie le passage du champ d'un milieu 2 à un milieu 1 (et réciproquement).

### 1. $\mathcal{E}_N$

Note : on va en fait noter  $dS$   $S$  pour simplifier l'écriture du flux (et éviter les  $ddS$  par exemple).

Calcul du flux :  $\iint \vec{D} \cdot \vec{S} = \vec{D}_{1N} \cdot \vec{S}_1 + \vec{D}_{2N} \cdot \vec{S}_2 + \Phi_{\mathbf{h}} = \vec{D}_{1N} \cdot \vec{S}_1 \cdot \vec{N}_{2 \rightarrow 1} + \vec{D}_{2N} \cdot \vec{S}_2 \cdot (-\vec{N}_{2 \rightarrow 1}) + \Phi_{\mathbf{h}}$

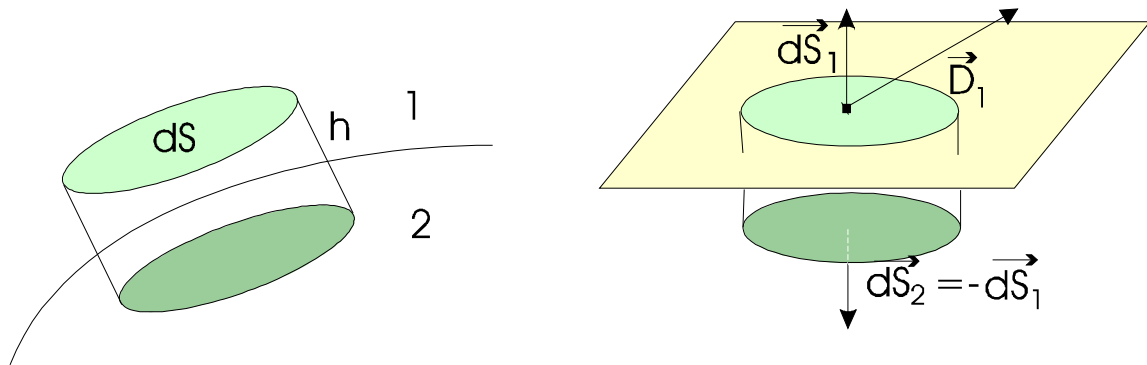
Or :  $\Phi_{\mathbf{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  (et  $S_1 = S_2 = S$ ). Donc :  $\iint \vec{D} \cdot \vec{S} \xrightarrow{h \rightarrow 0} (\vec{D}_{1N} - \vec{D}_{2N}) \cdot \vec{S} \cdot \vec{N}_{2 \rightarrow 1}$

On a : MG :  $\vec{\mathbf{d}}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$  ou plus généralement :  $\vec{\mathbf{d}}(\vec{D}) = \rho$

Or, par le théorème d'Ostrogradski :  $\iint \vec{D} \cdot \vec{S} = \iiint \vec{\mathbf{d}}(\vec{D}) \cdot d\tau$

Donc :  $\iiint \vec{\mathbf{d}}(\vec{D}) \cdot d\tau \xrightarrow{h \rightarrow 0} (\vec{D}_{1N} - \vec{D}_{2N}) \cdot \vec{S} \cdot \vec{N}_{2 \rightarrow 1}$

Or :  $\iiint \vec{\mathbf{d}}(\vec{D}) \cdot d\tau = Q_{\mathbf{h}} = \rho \cdot h \cdot S \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sigma \cdot S$



Deux cas de figure se présentent :

- s'il y a des charges en volume  $\rho \neq 0$  (mais fini), alors  $\sigma = 0$ .
- s'il n'y a que des charges surfaciques  $\sigma \neq 0$ . Cela peut être le cas dans un conducteur parfait où  $\rho = 0$ , ou si on importe des charges à un isolant que l'on pose alors en surface (Exemple : bâton d'ébonite, ...)

On a donc en conclusion :  $(\vec{D}_{1N} - \vec{D}_{2N}) = \sigma \cdot \vec{N}_{2 \rightarrow 1}$ , ou encore :  $\boxed{(\vec{E}_{1N} - \vec{E}_{2N}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \vec{N}_{2 \rightarrow 1}}$

## 2. $B_N$

On effectue le même calcul que pour  $E_N$  sachant que  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ .

On obtient donc :  $\boxed{\vec{B}_{1N} = \vec{B}_{2N}}$

## 3. $E_T$

Par MF :  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , et par le théorème de Stokes, on a :

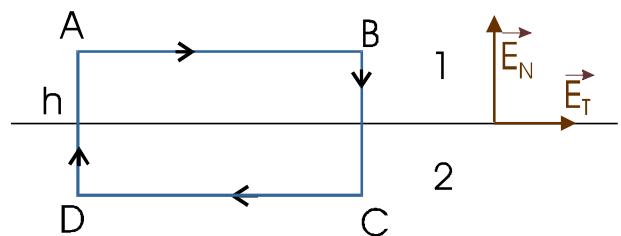
$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint \text{rot}(\vec{E}) \cdot \vec{S} = \iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} (\iint \vec{B} \cdot \vec{S})$$

Or :  $\iint \vec{B} \cdot \vec{S} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , car B reste fini. Donc, la dérivée tend aussi vers 0 et :

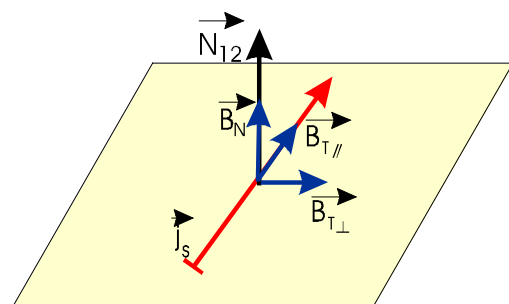
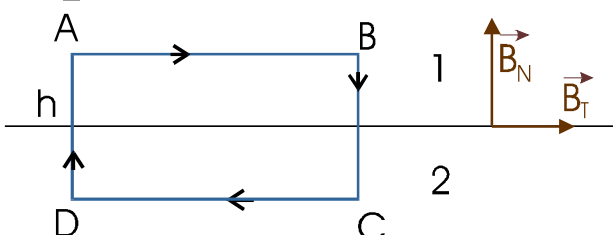
$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Or : } \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \vec{E}_1 \cdot \vec{AB} + \vec{E}_2 \cdot \vec{DC} = \vec{E}_{1T} \cdot \vec{AB} + \vec{E}_{2T} \cdot \vec{DC} = (\vec{E}_{1T} - \vec{E}_{2T}) \cdot \vec{AB}$$

Donc pour tout A et B on a :  $(\vec{E}_{1T} - \vec{E}_{2T}) \cdot \vec{AB} = 0$ . Donc on en conclut :  $\boxed{\vec{E}_{1T} = \vec{E}_{2T}}$



## 4. $B_T$



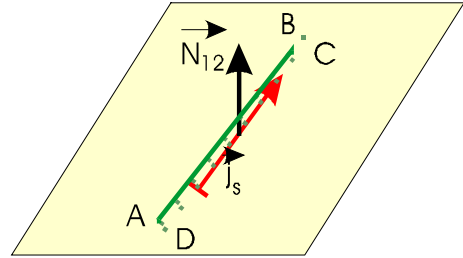
$$\text{MA : } \vec{\text{d}}(\vec{\text{B}}) = \mu_0 \cdot \vec{\text{j}} + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{\text{E}}}{\partial t}. \text{ Donc : } \oint \vec{\text{B}} \cdot \vec{\text{d}}\vec{\ell} = \iint \vec{\text{b}}(\vec{\text{B}}) \cdot \vec{\text{s}} = \iint \mu_0 \cdot \vec{\text{j}} \cdot \vec{\text{s}} + \iint \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{\text{E}}}{\partial t} \cdot \vec{\text{s}}$$

$$\text{Or : } \iint \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{\text{E}}}{\partial t} \cdot \vec{\text{s}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Donc, deux cas se présentent :

- il y a des courants en volume :  $\vec{\text{j}}_s = \vec{0}$  et  $\iint \mu_0 \cdot \vec{\text{j}} \cdot \vec{\text{s}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
- il y a des courants en surface :  $\vec{\text{j}}_s \neq \vec{0}$ .  $\text{j}_s$  et  $\vec{\text{B}}_T$  sont coplanaires. Calculons  $\vec{\text{B}}_{T//}$  et  $\vec{\text{B}}_{T\perp}$ .

$\vec{\text{B}}_{T//}$  :  $\oint \vec{\text{B}}_{T//} \cdot \vec{\text{d}}\vec{\ell} = \vec{\text{B}}_{T//1} \cdot \vec{\text{A}} + \vec{\text{B}}_{T//2} \cdot \vec{\text{D}} = 0$ . Or, ceci doit être valable pour tout contour ABCD, donc on a :  $\vec{\text{B}}_{T//1} = \vec{\text{B}}_{T//2}$

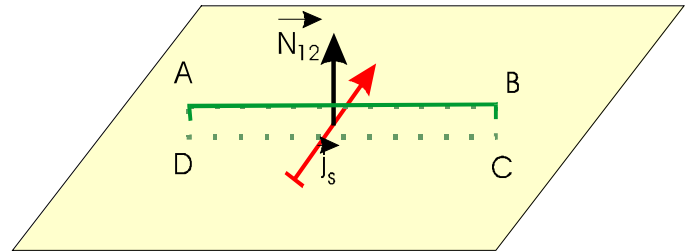


$\vec{\text{B}}_{T\perp}$  : Le problème est de calculer le flux de  $\text{j}_s$  à travers la surface engendrée par le contour. On obtient que le flux à travers ABCD vaut :  $\phi = \text{j}_s \cdot \vec{\text{A}}$ . Donc :

$$\oint \vec{\text{B}}_{T\perp} \cdot \vec{\text{d}}\vec{\ell} = \vec{\text{B}}_{T\perp 1} \cdot \vec{\text{A}} + \vec{\text{B}}_{T\perp 2} \cdot \vec{\text{D}} = \mu_0 \cdot \text{j}_s \cdot \vec{\text{A}}$$

. Or, ceci doit être valable pour tout contour ABCD, donc on a :

$$\vec{\text{B}}_{T\perp 1} - \vec{\text{B}}_{T\perp 2} = \mu_0 \cdot \vec{\text{j}}_s \wedge \vec{\text{N}}_{2 \rightarrow 1}$$



Conclusion :  $\boxed{\vec{\text{B}}_{T1} - \vec{\text{B}}_{T2} = \mu_0 \cdot \vec{\text{j}}_s \wedge \vec{\text{N}}_{2 \rightarrow 1}}$

## 5. Relations de passages

On a établi :  $\boxed{\left( \vec{\text{E}}_1 - \vec{\text{E}}_2 \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \vec{\text{N}}_{2 \rightarrow 1}}$  et  $\boxed{\vec{\text{B}}_1 - \vec{\text{B}}_2 = \mu_0 \cdot \vec{\text{j}}_s \wedge \vec{\text{N}}_{2 \rightarrow 1}}$ .

# IV. Réflexion d'une OPPM sur un conducteur

## 1. Pression de radiation

C'est la pression exercée par l'onde électromagnétique sur le conducteur parfait.

### 1. Calcul en considérant le gaz de photon

Un photon transporte une quantité de mouvement<sup>iv</sup>.  $E = p \cdot c$  car un photon a une masse nulle. De plus on a :  $E = h \cdot \nu$ . Donc :  $p = \frac{h \cdot \nu}{c}$ .

On s'intéresse à une réflexion normale d'une OPPM sur un conducteur parfait. Lors du choc contre la paroi, la quantité de mouvement de chaque photon varie ainsi :

$$\Delta \vec{p} = -2 \cdot \frac{h \cdot \nu}{c} \cdot \vec{\text{u}}_z$$

Notons  $n$  le nombre de photons par unité de volume. Pendant  $dt$ , il y a  $N$  chocs sur la surface  $S$  :  $N = n \cdot S \cdot c \cdot dt$ .

<sup>iv</sup> On a la formule relativiste générale hors programme suivante :  $E^2 = p^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4$ .

$$P = 2 \cdot n \cdot h \cdot \nu$$

## 2. Expressions de la pression de radiation en fonction de $E_0$ et $B_0$

$$P = \epsilon_0 \cdot E_0^2 \quad \text{ou} \quad P = \frac{B_0^2}{\mu_0}$$

## 3. La pression de radiation en fonction de la densité d'énergie interne

$$P = 2 \cdot \langle w_{\vec{u}} \rangle$$

## 4. Retrouver l'expression de la pression de radiation sans les photons

Ce n'est pas évident à cause des discontinuités des champs au niveau de l'interface.

## 2. Conducteur en mouvement

### 1. L'effet Doppler

Lorsqu'une source émet un rayonnement à une fréquence  $f_{\text{source}}$ , l'observateur le perçoit à une fréquence différente  $f_{\text{obs}}$ , dès lors que la source est en mouvement.

$$\text{On a : } \frac{f_{\text{source}} - f_{\text{obs}}}{f_{\text{obs}}} = \frac{v_{\text{source}}}{c}$$

## V. Ondes guidées dans un conducteur

### 1. Guide d'onde

#### 1. Hypothèses

➤ hypothèses générales :

- ondes TE
- propagation selon (Oz)

$$- \vec{E} = E_0(x, y) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot \vec{u} \quad \text{que l'on projette ainsi : } \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x = E_1(x, y) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \\ E_y = E_2(x, y) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

➤ Conditions aux limites :  $E_T = 0$ . Cette condition se traduit ainsi :

$$\begin{cases} E_y(0, y, z, t) = E_y(a, y, z, t) = 0 \\ E_x(x, 0, z, t) = E_x(x, b, z, t) = 0 \end{cases}$$

➤ On suppose que :  $E_1(x, y) = f(x) \cdot g(y)$

#### 2. Calcul de E

$E_x$  vérifie l'équation de propagation :  $\Delta \vec{E}_x - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial t^2} = \vec{0}$ . Donc :

$(f''(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g''(y)) \cdot e^{j(\omega t - kz)} - k^2 \cdot f(x) \cdot g(y) \cdot e^{j(\omega t - kz)} + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot f(x) \cdot g(y) \cdot e^{j(\omega t - kz)} = 0$ . Ce qui revient à :  $\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = 0$ . Or ceci doit être vérifié pour n'importe quels x

et y. Nécessairement, on a :

$$\begin{cases} \frac{f''(x)}{f(x)} = \epsilon_1 \\ \frac{g''(y)}{g(y)} = \epsilon_2 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 \end{cases}$$

La condition aux limites portant sur  $E_x$  fait que  $E_x$  doit s'annuler en au moins deux valeurs distinctes de y : en 0 et en b. Donc : nécessairement, g ne peut pas être une somme d'exponentiels réels. Ce qui revient à imposer le fait que  $\epsilon_2 < 0$ , donc on

pose :  $\epsilon_2 = -K_2^2$ . Donc :  $g(y) = A_2 \cdot \sin(K_2 \cdot y)$

$g(0) = 0$  et  $g(b) = 0$ , donc il existe n (entier) tel que :  $K_2 \cdot b = n \cdot \pi$ . Donc :

$$g(y) = A_2 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{b} \cdot y\right)$$

On suppose aussi que :  $\epsilon_1 < 0^v$ ,  $\epsilon_1 = -K_1^2$ . On a donc :  $f(x) = A_1 \cdot \sin(K_1 \cdot x) + B_1 \cdot \cos(K_1 \cdot x)$ .

On a : MG :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , donc :  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ , donc :  $\frac{\partial E_y}{\partial y} = -f'(x) \cdot g(y) \cdot e^{j(\omega t - kz)}$ , donc :

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -f'(x) \cdot A_2 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$

<sup>v</sup> Cette hypothèse est justifiée. Essayer en exercice le cas où la constante est positive : les conditions initiales entraîneront une contradiction.